Álgebra Lineal con Métodos Elementales.
Merino-Santos. Ed. Thomson
(Ejercicio 44, página 68)

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de *a*:

$$\begin{aligned} x + 3y - az &= 4 \\ -ax + y + az &= 0 \\ -x + 2ay &= a+2 \\ 2x - y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

* <u>Teorema de Rouche-Frobenius</u>.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -a \\ -a & 1 & a \\ -1 & 2a & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ a+2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

A matriz de coeficientes

A/B " ampliada

¿ rg(A) y rg(A/B)?

$\boxed{rg(A)}$

$rg(A) \leq 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -a \\ -a & 1 & a \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + \cancel{6a} - a^2 + 2a - \cancel{6a} + a =$$

$$= -a^2 + 3a - 2$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$rg(A) = 3 \quad si \quad a \neq 2, 1$

$\boxed{a=1}$

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 + \cancel{2} - 1 - 0 - \cancel{2} = -4 \neq 0.$$

$rg(A) = 3.$

$\boxed{a=2}$

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumadas nos sale

$$= rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} rg(A) = 3 \iff a \neq 2, \\ Si \ a = 2 \Rightarrow rg(A) = 2 \end{array}}$$

$$\boxed{rg(A|B)}$$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & -a & 4 \\ -a & 1 & a & 0 \\ -1 & 2a & 0 & a+2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad rg(A|B) \leq 4.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -a & 4 \\ -a & 1 & a & 0 \\ -1 & 2a & 0 & a+2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+5} \cdot 4 \begin{vmatrix} -a & 1 & a \\ -1 & 2a & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} - (a+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -a \\ -a & 1 & a \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\left(\cancel{4a^2} + 0 + a - \cancel{4a^2} - 2 + 0\right) - (a+2)\left(-2 + 6a - a^2 + 2a - 6a + a\right)$$

$$= -4(a-2) - (a+2)\underbrace{\left(-a^2 + 3a - 2\right)} = (*)$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{-2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$(*) = -4(a-2) + (a+2)(a-2)(a-1) = (a-2)\left[-4 + (a+2)(a-1)\right]$$

$$= (a-2) \cdot \underbrace{\left[a^2 + a - 6\right]} = (*)$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

$(*) = (a-2)^2 \cdot (a+3) = 0 \iff a=2 \vee a=-3.$

$rg(A|B) = 4 \iff a \neq 2, -3.$

$\boxed{a=2}$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = 2$$

$\boxed{a=-3}$

$rg(A|B) < 4$ ya que $\det(A|B) = 0$.

$rg(A) = 3$ para $a=-3$, por tanto

$rg(A|B) = 3$.

(*) $rg(A) = 3 \iff a \neq 2$, $\quad a=2 \Rightarrow rg(A) = 2.$

(*) $rg(A|B) = 4 \iff a \neq 2, -3$ $\begin{cases} a=-3 \Rightarrow rg(A|B) = 3 \\ a=2 \Rightarrow rg(A|B) = 2. \end{cases}$

T^a Rouche - Frobenius

Caso 1°: $a \neq 2, -3$, $\Rightarrow$ Sistema incompatible.

Caso 2°: $a = 2$, $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Caso 3°: $a = -3$ $\Rightarrow$ " " determinado.